Clase 9: Continuación.

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

1. Las Reglas Operacionales.

En lo que sigue supongamos que $f, g, \cdots \in \mathcal{D}'_+$ son Laplace transformables.

1. $\mathcal{L}$ es un operador lineal:

$$f(t) + g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z) + G(z), \quad \lambda f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \lambda F(z) \ \ (\Lambda \in \mathbb{C}).$$

Esto es evidente.

2.

$$f(t) * g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)G(z)$$

Dem:

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \langle (f*g)(t), e^{-tz}\rangle_t = \langle f(u), \langle g(v), e^{-(u+v)z}\rangle\rangle \\
&= \langle f(u), e^{-uz}\langle g(v), e^{-vz}\rangle\rangle \\
&= \langle f(u), e^{-uz}G(z)\rangle \\
&= G(z)\langle f(u), e^{-uz}\rangle \\
&= G(z)F(z) \\
&= F(z)G(z), \ \text{ listo.}
\end{aligned}$$

3.

$$f_{gen}^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} z^n F(z); \ \ n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Dem: $f_{gen}^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t) * f(t) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}} z^n F(z)$ ya que vimos que $\delta^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} z^n$, listo.

4.
$$f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-az}F(z), \quad a \in \mathbb{R} \ \ \underline{(\text{traslación en } t)}.$$

<u>Dem</u>: $f(t-a) = \delta_a(t) * f(t) \underset{2.}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} e^{-az}F(z)$ ya que $\delta_a(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-az}$.

5.
$$e^{\lambda t}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \ \ \underline{(\text{traslación en } z)}.$$

<u>Dem</u>: $e^{\lambda t}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle e^{\lambda t}f(t), e^{-tz}\rangle_t = \langle f(t), e^{-(z-\lambda t)}\rangle_t = F(z-\lambda)$, listo.

6.
$$t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n F^{(n)}(z); \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

<u>Dem</u>:

$$\begin{aligned} t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle t^n f(t), e^{-tz}\rangle_t &= \langle f(t), t^n e^{-tz}\rangle_t \\ &= \langle f(t), (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}(e^{-tz})\rangle_t \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\langle f(t), e^{-tz}\rangle_t \\ &= (-1)^n F^{(n)}(z), \quad \text{listo.} \end{aligned}$$

7. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $0 < a \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\langle f(at), \varphi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\varphi(t)dt \overset{s=at}{=} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\varphi\left(\frac{s}{a}\right)ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

por lo que definimos para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\langle f(at), \varphi(t)\rangle := \frac{1}{a}\langle f(t), \varphi\left(\frac{t}{a}\right)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Luego $f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle f(at), e^{-tz}\rangle \overset{(1)}{=} \frac{1}{a}\langle f(t), e^{-z/a}\rangle = \frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right)$, por lo tanto

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right), \quad a > 0 \ \ (\text{cambio de escala en la variable } t).$$

Observe que para que $f(at)$ sea <u>causal</u> es necesario que $a > 0$.

8. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de orden exponencial para $t \to \infty$ con $sop(f) \subseteq [c;\infty)$, entonces

$$F(z)e^{cz} \to 0 \ \text{ si } \ Rez \to \infty$$

<u>Dem</u>: ejercicio.

Ejemplo 1. *Sea* $f(t) = h(t)\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}$. *Esta es una función causal y* <u>*acotada*</u> *(por lo tanto de orden exponencial para* $t \to \infty$ *con* $k = 0$ *en (9) de la clase 8)* $\Longrightarrow$ *existe* $F(z) = (\mathcal{L}f(t))(z)$. *Se pide hallar* $F(z)$. *Sea* $g(t) = tf(t) = h(t)\operatorname{sen}(t)$, *entonces* $tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z^2+1}$, *pero también* $tf(t) \xrightarrow[6.]{\mathcal{L}} -F'(z)$, *por lo tanto* $F'(z) = -\frac{1}{z^2+1} \Longrightarrow F(z) = -\arctan(z) + c$ *para cierta constante* c. *Pero según 8. tenemos* $F(z) \to 0$ *si* $Re z \to \infty$, *lo que implica que* $c = \arctan(\infty) = \pi/2$

$$F(z) = \frac{\pi}{2} - \arctan(z),$$

es decir, encontramos que

$$h(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\pi}{2} - \arctan(z). \tag{2}$$

Imagínese Ud el cómputo $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int\limits_0^\infty e^{-tz}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt$, *una integral* <u>*bastante complicada*</u>. *Esta complicación la evitamos por completo por "la magia de las reglas operacionales " (!!).*

Tenemos

$$\begin{aligned} f'_{gen}(t) &= f'_{cl}(t) + \delta(t) \ \ \textit{(tenemos } \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1\textit{)} \\ &= h(t)\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2} + \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} zF(z) \\ &= \left(\mathcal{L}\left(h(t)\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2}\right)\right)(z) + 1 \end{aligned}$$

entonces con (2)

$$h(t)\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} z\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(z)\right)$$

e imagínese usted tener que calcular

$$\int\limits_0^\infty e^{-tz}\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2}dt.$$

2. La TL inversa.

Dada $F(z)$, TL de una $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, ¿como hallar $f(t)$?. Este es el <u>problema inverso</u>

$$F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = ?.$$

Por supuesto, cada fórmula $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$ conocida, es en el mismo momento una fórmula $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$ para la TL inversa. Por ejemplo (ver ejemplo anterior)

$$z\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(z)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2}.$$

Consideremos el caso que $F(z)$ es una función racional, es decir un cociente $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ de polinomios, donde podemos suponer que $P(z)$, $Q(z)$ no tienen ceros comunes.

Ejemplo 2. *(a) Sea* $F(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2+1)}$. *Aplicando <u>fracciones parciales</u> ponemos*

$$\frac{1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2+1} \implies 1 = A(z^2+1) + (Bz+C)(z+1)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$

$$z = -1 \implies 1 = 2A \implies A = \frac{1}{2} \implies 1 = \frac{1}{2}(z^2+1) + (Bz+C)(z+1),$$

luego

$$z = 0 \implies 1 = \frac{1}{2} + C \implies C = \frac{1}{2} \implies 1 = \frac{1}{2}(z^2+1) + \left(Bz + \frac{1}{2}\right)(z+1),$$

luego

$$z = 1 \implies 1 = 1 + \left(B + \frac{1}{2}\right)2 \implies B = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \implies F(z) &= \frac{1/2}{z+1} + \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}{z^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1} \\ &\xrightarrow[\textit{tabla}]{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \frac{1}{2}h(t)e^{-t} - \frac{1}{2}h(t)\cos(t) + \frac{1}{2}h(t)\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

$$\implies f(t) = \frac{1}{2}h(t)\left[e^{-t} - \cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right].$$

(b) Se pide hallar $g(t) = h(t)e^{-t} * h(t)\operatorname{sen}(t)$. *Tenemos*

$$g(t) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}^{-1}} G(z) = \frac{1}{z+1}\frac{1}{z^2+1}$$

ya que

$$h(t)e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z+1}, \quad h(t)\operatorname{sen}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z^2+1}$$

según la tabla. Luego

$$G(z) = \frac{1}{z+1}\frac{1}{z^2+1} \xrightarrow[(a)]{\mathcal{L}^{-1}} g(t) = \frac{1}{2}h(t)\left(e^{-t} - \cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right).$$

Vemos aquí la <u>aplicación de la TL al computo de productos de convolución</u>. La idea general es el esquema

$$f(t) = g(t) * k(t) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}} F(z) = G(z)K(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t).$$

Ejemplo 3. *(a) Se pide hallar una s.f. causal $E(x)$ del ODLCC $L = d^2/dx^2 + k^2$ $(k > 0)$.*

Tenemos

$$E''_{gen}(x) + k^2 E(x) = \delta(x) \xrightarrow[3.]{\mathcal{L}} z^2 + \Xi(z) + k^2\Xi(z) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad (z^2 + k^2)\Xi(z) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Xi(z) = \frac{1}{z2 + k^2} = \frac{1}{k}\frac{k}{z^2 + k^2}$$

$$\xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}^{-1}} E(x) = \frac{1}{k}h(x)\,\mathrm{sen}(kx),$$

la s.f. ya encontrada antes. Vemos aquí: la TL es un instrumento eficiente para encontrar s.f. causales de ODLCC. La idea general es el esquema siguiente. Si

$$L = a_0 + a_1\frac{d}{dx} + \cdots + a_n\frac{d^n}{dx^n},$$

entonces

$$LE(x) = \delta(x) \quad \Longrightarrow \quad a_0E(x) + a_1E'_{gen}(x) + \cdots + a_nE^{(n)}_{gen}(x) = \delta(x)$$

$$\xrightarrow[3.]{\mathcal{L}} a_0\Xi(z) + a_1z\Xi(z) + \cdots + a_nz^n\Xi(z) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Xi(z) = \frac{1}{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} E(x).$$

(b) Se pide resolver la ED

$$-u''(x) + u(x) = h(x), \quad -\infty < x < \infty$$

que ya resolvimos en la Clase 7. Tenemos, asumiendo la existencia de una solución $u(x)$ Laplace transformable,

$$-u''(x) + u(x) = h(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-z^2 + 1)U(z) = \frac{1}{z}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad U(z) \quad &= \quad \frac{1}{z(1 - z^2)} = -\frac{1}{z(z+1)(z-1)} = (\text{fracciones parciales}) \\ &= \quad \frac{1}{z} - \frac{1/2}{z+1} - \frac{1/2}{z-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(x) - \frac{1}{2}h(x)\left[e^{-x} + e^{x}\right] = h(x)(1 - \cosh(x)). \end{aligned}$$

Pero lo anterior es basado en la suposición de que existe una solución Laplace transformable, y por eso es en principio necesario verificar que $h(x)(1 - \cosh(x))$ realmente es solución de la ED. Esto lo dejamos al lector. Observe que esta solución particular de la ED ya encontramos en la Clase 7. La solución general de la ED es

$$u(x) = h(x)(1 - \cosh(x)) + Ae^x + Be^{-x} \quad (A, B \in \mathbb{C} \text{ arbitrarios}).$$

Vemos entonces: *La TL puede servir para encontrar soluciones particulares Laplace transformables de una ED con coeficiente constantes.*

(c) *Sea la ED*

$$-u''(x) + u(x) = h(x)e^{x^2}; \quad -\infty < x < \infty.$$

No podemos aplicar la TL ya que $h(x)e^{x^2}$ *no es Laplace transformable. Lo que sí podemos hacer es utilizar la s.f* $E_1(x) = -h(x)\operatorname{senh}(x)$ *de* $L = -d^2/dx^2 + 1$ *(Ver Clase 7) y encontrar la solución particular* $u_p(x) = -h(x)\operatorname{senh}(x) * h(x)e^{x^2}$*. La s.f* $E_1(x)$ *sí podemos encontrar con la TL:*

$$-E''_{gen}(x) + E(x) = \delta(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-z^2+1)\Xi(z) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \Xi(z) = -\frac{1}{z^2-1} \xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}} E(x) = -h(x)\operatorname{senh}(x).$$

Una manera alternativa para hallar la TL inversa de $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ es el método de los residuos. Si $grado(P) \geq grado(Q)$, el primer paso es hacer la división

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = R(z) + \frac{\widetilde{P}(z)}{\widetilde{Q}(z)}$$

donde $R(z)$ es un polinomio y $grado(\widetilde{P}) < grado(\widetilde{Q})$. Supongamos entonces que

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } grado(P) < grado(Q).$$

Los ceros $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ de $Q(z)$ (cada uno con su multiplicidad correspondiente) son los polos de $F(z)$. Tenemos entonces

$$F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = h(t)\sum_{n=1}^{N} Res_{\alpha_n}\left(e^{tz}F(z)\right) \tag{3}$$

donde $Res_{\alpha_i}(e^{tz}F(z))$ es el residuo de $e^{tz}F(z)$ en $z = \alpha_i$.

Ejemplo 4. (a) *Sea* $F(z) = \dfrac{z^4+2z}{z^2+1}$*. Tenemos haciendo la división*

$$F(z) = z^2 - 1 + \frac{2z+1}{z^2+1} = z^2 - 1 + G(z), \quad G(z) = \frac{2z+1}{z^2+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \delta''(t) - \delta(t) + g(t). \tag{4}$$

Además

$$G(z)=\frac{2z+1}{z^2+1}$$

tiene polos en $z=\pm i$ y

$$\begin{aligned}Res_i\left(e^{tz}G(z)\right) &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{2z+1}{z^2+1}e^{tz}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{2z+1}{(z-i)(z+i)}e^{tz}\\ &= \lim_{z\to i}\frac{2z+1}{z+i}e^{tz}\\ &= \frac{2i+1}{2i}e^{it}.\end{aligned}$$

Similarmente

$$Res_{-i}\left(e^{tz}G(z)\right)=\frac{2i-1}{2i}e^{-it}$$

$$\begin{aligned}\overset{(3)}{\Longrightarrow}\quad g(t) &= h(t)\left[\frac{2i+1}{2i}e^{it}+\frac{2i-1}{2i}e^{-it}\right]\\ &= h(t)\left[e^{it}-e^{-it}\right]+\frac{1}{2i}\left[e^{it}-e^{-it}\right]\\ &= \textit{(fórmula de Euler)}\\ &= 2h(t)\cos(t)+h(t)\operatorname{sen}(t),\end{aligned}$$

y ahora con (4)

$$f(t)=\delta''(t)-\delta(t)+h(t)[2\cos(t)+\operatorname{sen}(t)].$$

En este caso el método de los residuos <u>no</u> es la manera más rápida para hallar $g(t)$. Más corto

$$G(z)=2\frac{z}{z^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\xrightarrow[\textit{tabla}]{\mathcal{L}}g(t)=2h(t)\cos(t)+h(t)\operatorname{sen}(t).$$

(b) *Sea $K(z)=e^{3z}\frac{z^4+2z}{z^2+1}$. Ahora $K(z)$ <u>no es</u> una función racional por la presencia del factor e^{3z}. Pero este factor podemos acomodar con la regla operacional 4.. Tenemos*

$$K(z)=e^{3z}F(z)$$

con la $F(z)$ de (a), es decir,

$$F(z)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}f(t)=\delta''(t)-\delta(t)+h(t)(2cos(t)+\operatorname{sen}(t)).$$

Entonces con (4) tenemos

$$K(z)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}f(t+3)=\delta''(t+3)-\delta(t+3)+h(t+3)[2\cos(t+3)+\operatorname{sen}(t+3)]$$

$$\Longrightarrow\quad k(t)=\delta''_{-3}(t)-\delta_{-3}(t)+h(t+3)[2\cos(t+3)+\operatorname{sen}(t+3)].$$

Ejemplo 5. *Sea* $F(z) = \dfrac{2z^2 \cosh(z)}{4+z^2}$ *(no es una función racional). Tenemos*

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{2z^2}{4+z^2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \left(1 - \frac{4}{z^2+4}\right)\left(e^z + e^{-z}\right) \\
&= e^z + e^{-z} - 4e^z \frac{1}{z^2+4} - 4e^{-z}\frac{1}{z^2+4} \\
&\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \delta_{-1}(t) + \delta_1(t) - 2h(t+1)\,\mathrm{sen}[2(t+1)] - 2h(t-1)\,\mathrm{sen}[2(t-1)]
\end{aligned}$$

usando 4. y la tabla.